BİR OLAYIN OLASILIĞI

Tanım: Bir deney eşit olasılıklı "n" farklı sonuç verirse ve bu sonuçların "m" tanesi bir A olayına uygunsa P(A) ile gösterilen A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{Uygulanan\ sonuçların\ sayısı}{Örnek\ uzaydaki\ tüm\ sonuçların\ sayısı}=\frac{s(A)}{s(\Omega)}$$

olur.

Örnek: Bir zarın rastgele atılmasında,

a) Zarın tek sayı gelmesi olasılığı nedir?
b) Zarın çift sayı gelmesi olasılığı nedir?
c) Zarın 2 gelmesi olasılığı nedir?
d) Zarın 2' den büyük gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

a) Bir zarın rastgele atılması deneyinde örnek uzay $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ şeklindedir. Örnek uzayın eleman sayısı $s(\Omega)=6$ dır. Zarların tek sayı gelmesi olayına A denirse A olayı $A=\{1,3,5\}$ şeklinde yazılır ve A olayının eleman sayısı $s(A)=3$ dür. Buradan A olayının olasılığı

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}=\frac{3}{6}$$

olarak bulunur.

b) Zarın çift sayı gelmesi olayı $B=\{2,4,6\}$ olup eleman sayısı $s(B)=3$ dür. Böylece B olayının olasılığı

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)}=\frac{3}{6}$$

c) Zarın 2 gelmesi olayı $C=\{2\}$ olup, eleman sayısı $s(C)=1$ dir. Böylece C olayının olasılığı

$$P(C)=\frac{s(C)}{s(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

d) Zarın 2' den büyük gelmesi olayı D={3,4,5,6} olup, eleman sayısı s(D)=4 olduğundan D olayının olasılığı

$$P(D)=\frac{s(D)}{s(\Omega)}=\frac{4}{6}$$

olarak elde edilir.

Örnek: Bir zar peşpeşe iki defa atıldığında,

a) Üst yüzeylerinin toplamının çift gelmesi olasılığı nedir?

b) Üst yüzeylerinin toplamının 8 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Bir zarın ardı ardına atılması deneyi için örnek uzay aşağıdaki gibidir.

$$\Omega=\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),\ldots,(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),\ldots,(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),\ldots,(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),\ldots,(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),\ldots,(6,6) \end{Bmatrix}$$

Görüldüğü gibi örnek uzayın eleman sayısı s(Ω)=36 dır.

a) $A=\{(x,y): x+y \text{ çift gelmesi}\}$

s(A)=18

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}=\frac{18}{36}$$

b) B: Toplamının 8 gelmesi

B={(2,6), (3,5), (4,4), (6,2), (5,3)}

s(B)=5

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)}=\frac{5}{36}$$

KOŞULLU OLASILIK

Bazı denemelerde Ω örnek uzayında ilgilendiğimiz boş olmayan bir B olayının alt kümeleri ile ilgileniriz. Bu durumda Ωnın tamamı gereksiz olabilir, yani yeni bir örnek uzay kurmak yararlı olabilir. Bu yeni örnek uzay üzerinde tanımlanan olasılık ölçüsü koşullu olasılık olmaktadır. Yani, A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı ise buna A' nın koşullu olasılığı denir. Bu durumda koşullu olasılık,

$$P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

formülüyle ifade edilir. Bu formül B bilindiğinde A'nın koşullu olasılığını verir.

Tanım: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve herhangi bir boş olmayan B olayı için ($B\neq\emptyset$),

$$P_B: U \rightarrow [0,1]$$

$$A \rightarrow P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

şeklinde tanımlanan küme fonksiyonu, U üzerinde bir olasılık ölçüsüdür.

Örnek: Bir çift zar atıldığını varsayalım. A olayı birinci zarın çift gelmesi, B olayı ikinci zarın 6 gelmesi olasılığı olsun. İkinci zarın 6 geldiği bilindiğinde birinci zarın çift gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Çift zar atılması deneyinde örnek uzay s(Ω)=36 elemanlıdır. B olayı ikinci zarın 6 gelmesi

B={(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)}

şeklinde yazılır ve eleman sayısı s(B)=6 dır. Buradan B olayının olasılığı

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)}=\frac{6}{36}$$

olarak bulunur. Birinci zarın çift gelmesi ve ikinci zarın 6 gelmesi olayı

A∩B={(2,6), (4,6), (6,6)}

olup, buradan A∩B olayının olasılığı

$$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\Omega)}=\frac{3}{36}$$

elde edilir. Buradan ikinci zarın 6 geldiği bilindiğinde birinci zarın çift gelmesi olasılığı

$$P(A/B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek:

	Sigara İçiyor	Sigara İçmiyor	Toplam
Erkek	19	26	45
Kadın	30	25	55
Toplam	49	51	100

a) 100 kişi arasından seçilen rastgele bir kişinin erkek olduğu bilindiğinde sigara içiyor olma olasılığı nedir?

b) Rastgele seçilen kişinin sigara içtiği biliniyorsa kadın olma olasılığı nedir?

Çözüm:

a) P(Sigara içiyor/Erkek)=$\frac{P(\{sigara\ içiyor\}\cap\{erkek\})}{P(erkek)}=\frac{19}{45}$

b) P(Kadın/Sigara içiyor)=$\frac{P(\{kadın\}\cap\{sigara\ içiyor\})}{P(sigara\ içiyor)}=\frac{30}{49}$

OLAYLARIN BAĞIMSIZLIĞI

(Ω, U, P) olasılık uzayında $A,B\in U$ olmak üzere,

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

eşitliği sağlanıyor ise A ve B olayları bağımsızdır denir.

Koşullu olasılık ile bağımsızlık ifade edilmek istenirse, koşullu olasılık

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada A ile B bağımsızsa,

$$P(A/B)=\frac{P(A).P(B)}{P(B)}$$

$$P(A/B)=P(A)$$

olarak yazılır.

Bir olayın gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşmesine sebep olmuyorsa veya etkilemiyorsa bu iki olay birbirinden bağımsızdır denir.

Örnek: Bir paranın iki kez atılması deneyinde, birinci atışta tura gelmesi olayı ile ikinci atışta tura gelmesi olayı bağımsız mıdır?

Çözüm: Bir paranın iki kez atılması deneyinde örnek uzay

$$\Omega=\{(Y,Y),(Y,T),(T,Y),(T,T)\}$$

şeklindedir ve örnek uzayın eleman sayısı s(Ω)=4 dür. Paranın birinci atışta tura gelmesi olayına A, İkinci atışta tura gelmesi olayına B denilirse,

$A=\{(T,Y),(T,T)\}$ $\quad s(A)=2 \;\rightarrow\; P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}=\frac{2}{4}$

$B=\{(Y,T),(T,T)\}$ $\quad s(B)=2 \;\rightarrow\; P(B)=\frac{2}{4}$

$A\cap B=\{(T,T)\}$ $\quad s(A\cap B)=1 \;\rightarrow\; P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\Omega)}=\frac{1}{4}$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

olduğundan A ve B olayları birbirinden bağımsızdır denir.

Örnek: Bir ailenin 3 çocuğa sahip olması durumunda en çok 1 erkek çocuğa sahip olması olayı B, her iki cinsiyetten çocuğa sahip olması olayı A olsun.

a) A ve B olayları bağımsız olaylar mıdır?

b) Ailenin 2 çocuğa sahip olması halinde A ile B olaylarının bağımlı olaylar olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu problem için örnek uzay

$$\Omega=\{EEE, EEK, KEE, EKE, KKE, EKK, KEK, KKK\}$$

şeklindedir. Örnek uzayın eleman sayısı s(Ω)=8 dir. A ve B olayları ve eleman sayıları sırasıyla

$A=\{EEK, KEE, EKE, KKE, EKK, KEK\}$ s(A)=6

$B=\{KKE, EKK, KEK, KKK\}$ s(B)=4

şeklindedir. A∩B olayı

$$A\cap B=\{KKE, EKK, KEK\}$$

olduğuna göre

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)} = \frac{6}{8}$$

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)} = \frac{4}{8}$$

$$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

ise

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$

olduğundan A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Örnek:

	Kanser	Kanser Değil
Sigara İçiyor	0.5	0.2
Sigara İçmiyor	0.1	0.2

Yukarıdaki tablonun hücrelerinde verilen sayıların rastgele seçilen bir kişinin verilen hücreye düşmesi olasılığını verdiği varsayılsın.

a) A olayı seçilen kişinin sigara içiyor olması, B olayı ise seçilen kişinin kanser olması ise A ve B olayları bağımsız mıdır?

$\Omega=1$

$A=0.5+0.2=0.7 \quad P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}=\frac{0.7}{1}=\frac{7}{10}$

$B=0.5+0.1=0.6 \quad P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)}=\frac{0.6}{1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$A\cap B=0.5$

$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\Omega)}=\frac{0.5}{1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$\frac{1}{2}=(0.7).(0.6)$$

olduğundan A ve B olayları birbirine bağımlıdır.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.